

त्रिभुज (Triangle)

6.3 त्रिभुज की समरूपता

लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1. दी गई आकृति में $DE \parallel BC$ और $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{5}$ यदि $AC = 4.8 \text{ cm}$ हो तो AE का मान ज्ञात करें।

उत्तर:- माना की $AE = x \text{ cm}$

$$\therefore EC = AC - AE = 4.8 - x$$

थेल्स प्रमेय से,

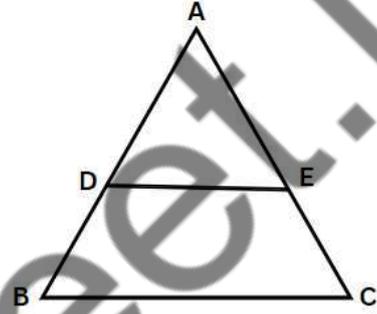
$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{x}{4.8 - x}$$

$$\text{या, } 14.4 - 3x = 5x$$

$$\therefore 14.4 = 5x + 3x = 8x \quad \therefore x = \frac{14.4}{8} = 1.8$$

$$\therefore AE = 1.8 \text{ cm}$$



प्रश्न 2. त्रिभुज ABC में भुजाओं AB तथा AC पर दो बिंदु D और E क्रमशः इस प्रकार हैं की $DE \parallel BC$ यदि $AD = x, DB = x - 2, AE = x + 2$ तथा $EC = x - 1$ तो x का मान ज्ञात करें।

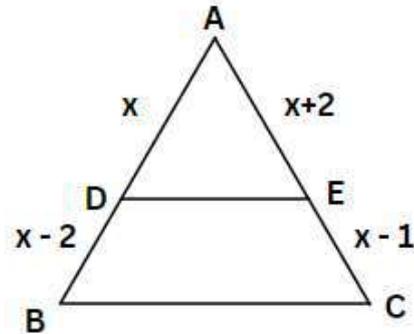
उत्तर:- $\triangle ABC$ में $DE \parallel BC$ है

$$\text{अतः } \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

$$\therefore \frac{x}{x-2} = \frac{x+2}{x-1}$$

$$\text{या, } x^2 - 4 = x^2 - x \text{ या } -4 = -x$$

$$\therefore x = 4$$



प्रश्न 3. दी गई आकृति में LE ज्ञात करें जहाँ $LM \parallel FQ$

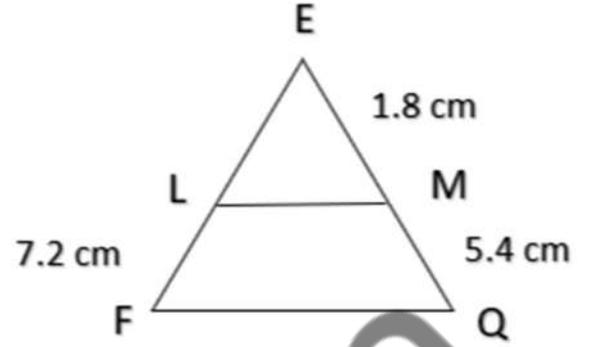
उत्तर:- $\therefore LM \parallel FQ$

थेल्स प्रमेय से,

$$\frac{LE}{LF} = \frac{EM}{MQ}$$

$$\frac{LE}{7.2} = \frac{1.8}{5.4} \quad \therefore LE = \frac{1.8}{5.4} \times 7.2$$

$$\frac{18}{54} \times 7.2 = \frac{1}{3} \times 7.2 = 2.4 \text{ cm}$$

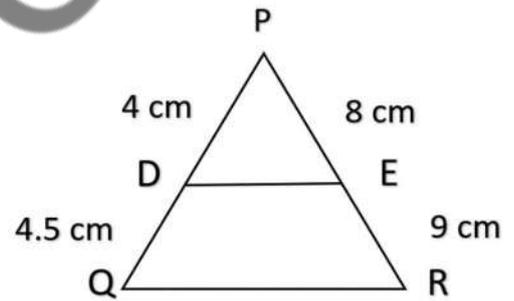


प्रश्न 4. $\triangle PQR$ में PQ और PR पर क्रमशः बिन्दु E और F स्थित हैं यदि $PE = 4 \text{ cm}$, $QE = 4.5 \text{ cm}$, $PF = 8 \text{ cm}$ तथा $RF = 9 \text{ cm}$ है तो सिद्ध करें कि $ER = QR$

उत्तर:- $\frac{PE}{PQ} = \frac{4}{4.5} = \frac{40}{45} = \frac{8}{9}$

फिर $\frac{PF}{FR} = \frac{8}{9}$

$$\frac{PE}{PQ} = \frac{PF}{FR}$$



अतः थेल्स के विलोम से $EF \parallel QR$

प्रश्न 5. $\triangle PQR$ भुजाओं PQ और PR पर क्रमशः E और F स्थित हैं यदि $PQ = 1.28 \text{ cm}$, $PR = 2.56 \text{ cm}$, $PE = 0.18 \text{ cm}$ तथा $PF = 0.36 \text{ cm}$ है तो सिद्ध करें कि $EF \parallel QR$

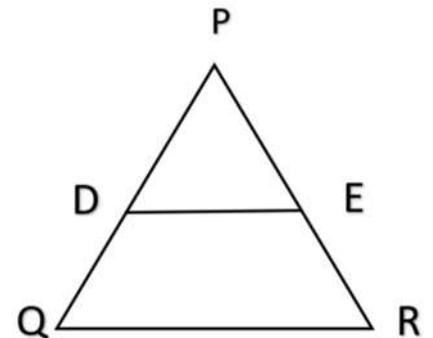
उत्तर:- $PQ = 1.28 \text{ cm}$

$$EQ = PQ - PE = 1.28 - 0.18 = 1.1 \text{ cm}$$

$$PR = 2.56$$

$$\therefore FR = PR - PF$$

$$= 2.56 - 0.36 = 2.2 \text{ cm}$$



$$\therefore \frac{PE}{EQ} = \frac{0.18}{1.1} = \frac{18}{110} = \frac{9}{55}$$

$$\text{तथा } \frac{PF}{ER} = \frac{0.36}{2.2} = \frac{36}{22} = \frac{9}{55}$$

$$\therefore \frac{PE}{EQ} = \frac{PF}{ER} \text{ अतः थेल्स प्रमेय के विलोम से } EF \parallel QR$$

प्रश्न 6. समलम्ब चतुर्भुज ABCD जिसमें $AB \parallel CD$ के विकर्ण AB और CD परस्पर O बिंदु पर प्रतिच्छेद करते हैं दर्शाएँ की $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$

उत्तर:-

$\triangle AOB$ और $\triangle COD$ में $\angle AOB = \angle COD$

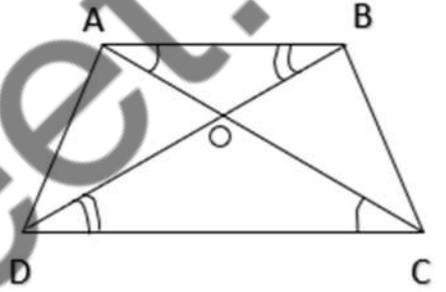
$\angle OAB = \angle OCD$ एकांतर कोण हैं

$\angle OBA = \angle ODC$ एकांतर कोण हैं

क्योंकि $AB \parallel DC$ है।

$\therefore \triangle AOB \sim \triangle COD$ (समरूपता कसौटी AAA)

$$\therefore \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$$



7. यदि किसी त्रिभुज ABC की भुजा BC पर D एक ऐसा बिंदु है कि $\angle ADC = \angle BAC$ तो सिद्ध करें कि $\frac{CA}{CD} =$

$$\frac{CB}{CA}$$

उत्तर:- दिया है कि ABC एक त्रिभुज है

BC पर D कोई बिंदु इस प्रकार है कि $\angle ADC = \angle BAC$

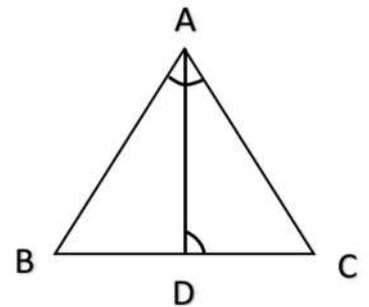
तो सिद्ध करना है कि $\frac{CA}{CD} = \frac{CB}{CA}$

प्रमाण : $\triangle ABC$ और $\triangle ADC$ में

$$\angle BAC = \angle ADC$$

$$\angle C = \angle C$$

शेष कोण $\angle DAC = \angle B$



$$\Delta ABC \sim \Delta ADC$$

$$\therefore \frac{CA}{CD} = \frac{CB}{CA} \text{ साबित हुआ}$$

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

1. यदि एक रेखा किसी त्रिभुज की दो भुजाओं को एक ही अनुपात में विभाजित करें तो यह तीसरी भुजा के समांतर होगी।

उत्तर:- दिया है ABC एक त्रिभुज है

DE रेखा AB और AC से क्रमशः D और E

पर इस प्रकार मिलती है की

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

तो साबित करना है की $DE \parallel BC$ BC के समांतर एक रेखा DE' खिंचा

प्रमाण: $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ दिया है

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{E'C}$$

समीकरण (i) = (ii)

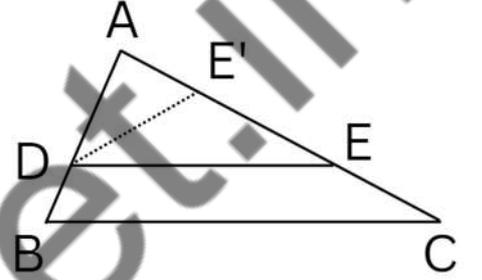
$$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE'}{E'C}$$

$$\text{या, } \frac{AD}{DB} = \frac{E'C}{AE}$$

दोनों पक्षों में 1 जोड़ने पर प्राप्त फल

$$\frac{EC}{AE} + 1 = \frac{E'C}{AE'} + 1$$

$$\text{या, } \frac{EC+A}{AE} = \frac{E'C+AE'}{AE} \text{ या, } \frac{AC}{AE} = \frac{AC}{AE}$$



$$\therefore \frac{1}{AE} = \frac{1}{AE'} \text{ या, } AE = AE'$$

यह तभी संभव जब E', E पर हो अतः $E' E$ सम्पाती होगा

$\therefore DE \parallel BC$ साबित हुआ।

6.4 त्रिभुज की समरूपता के लिए कसौटियां

लघु उत्तरीय प्रश्न

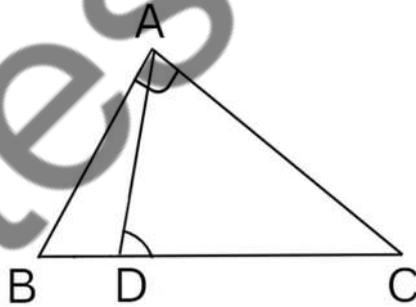
1. दो त्रिभुज की समरूपता होने के लिए प्रतिबन्ध को लिखें।

उत्तर:- (i) दो त्रिभुजों में संगत कोण बराबर हों।

(ii) दो त्रिभुजों की संगत भुजाएँ अनुपातिक हो।

2. एक त्रिभुज की ABC की भुजा BC पर एक बिंदु D इस प्रकार स्थित है की $\angle ADC = \angle BAC$ तो दिखाईए कि $CA^2 = CB \cdot CD$ हैं।

उत्तर:- $\triangle ABC$ के BC भुजा पर D कोई बिंदु है और $\angle BAC = \angle ADC$ दिखाना है की $CA^2 = CB \cdot CD$



अब $\triangle ABC$ और $\triangle ADC$ में $\angle BAC = \angle ADC$ दिया हुआ है

$$\angle C = \angle C$$

शेष $\angle B =$ शेष $\angle DAC$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ADC$$

$$\therefore \frac{AC}{CD} = \frac{BC}{AC}$$

$\therefore CA^2 = CB \cdot CD$ साबित हुआ

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

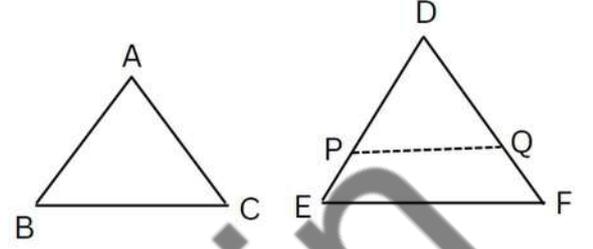
1. यदि दो त्रिभुजों के संगत कोण बराबर हों तो उसकी सांगत भुजाएं एक ही अनुपात में होती हैं और ये त्रिभुज समरूप होता है।

उत्तर:- दिया है कि ΔABC और DEF दो त्रिभुज हैं जिनमें

$\angle A = \angle D, \angle B = \angle E$ और $\angle C = \angle F$ तो दिखाना है कि

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$$

तथा $\Delta ABC \sim \Delta DEF$



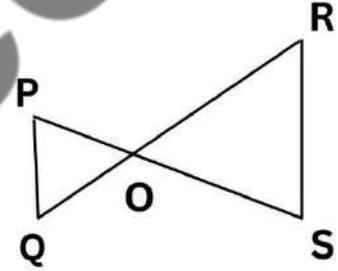
2. ΔABC की भुजा BC पर AD रेखा इस प्रकार है कि $\angle ADC = \angle BAC$ तो दिखिए कि $AC^2 = BC \times CD$

उत्तर:- $PQ \parallel QR$ (दिया है।)

अतः $\angle Q = \angle R$ (एकांतर कोण)

साथ ही $\Delta POQ = \Delta SOR$ (शीर्षभिमुख कोण)

$\therefore \Delta PQR \sim \Delta SOR$ (A - A - A (सहायक कसौटी))



6.5 समरूप त्रिभुज का क्षेत्रफल

लघु उत्तरीय प्रश्न

1. ΔABC और ΔDEF समरूप हैं इनके क्षेत्रफल क्रमशः 9cm^2 और 64cm^2 हैं यदि $DE = 5.1\text{ cm}$ तो AB का मान ज्ञात करें।

उत्तर:- $\frac{\text{ar}(\Delta ABC)}{\text{ar}(\Delta DEF)} = \frac{AB^2}{DE^2}$

$$\text{या } \frac{9}{64} = \frac{AB^2}{DE^2} \quad \therefore \frac{AB}{DE} = \sqrt{\frac{9}{64}} = \frac{3}{8}$$

$$\therefore AB = \frac{3}{8} \times DE = \frac{3}{8} \times 5.1 = \frac{15.3}{8} = 1.91\text{ cm}$$

2. किसी त्रिभुज के तिन कोण x , y तथा 40° है दो कोण x तथा y के बिच का अंतर 30° हैं तो x तथा y ज्ञात करें।

उत्तर:-

$$\begin{aligned}x + y + 40^\circ &= 180^\circ \\x + y &= 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ \\x - y &= 30^\circ\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\therefore 2x &= 170^\circ \\ \therefore x &= \frac{170}{2} = 85^\circ\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\therefore x + y &= 140^\circ \\ \therefore 85 + y &= 140^\circ\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\therefore y &= 140^\circ - 85^\circ = 55^\circ \\ \angle x &= 85^\circ, \angle y = 55^\circ\end{aligned}$$

3. एक समबाहु त्रिभुज की परिमिति 30 cm है। इसका क्षेत्रफल ज्ञात करें।

उत्तर:- समबाहु त्रिभुज के एक भुजा की लम्बाई $= \frac{30}{3} = 10$ सेमी०

$$\begin{aligned}\text{समबाहु } \Delta \text{ का क्षेत्रफल} &= \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\text{भुजा})^2 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 10^2 = \frac{\sqrt{3} \times 100}{4} = 25\sqrt{3} \text{ cm}^2\end{aligned}$$

4. एक समलम्ब चतुर्भुज की समांतर भुजाएँ 16 cm और 24 cm है। इनके बिच की दुरी 10 cm है तो चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

उत्तर:-

$$\begin{aligned}\text{समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल} &= \frac{1}{2} (\text{समांतर भुजाओं का योग}) \times \text{ऊँचाई} \\ &= \frac{1}{2} (16 + 24) \times 10 \text{ cm}^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 40 \times 10 \text{ cm}^2 = 200 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

अतः समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= 200 \text{ cm}^2$

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

1. दिए गए चित्र में $DE \parallel BC$ तथा $\frac{BD}{DA} = \frac{5}{3}$ तो $\frac{\text{क्षेत्र}(\Delta DEF)}{\text{क्षेत्र}(\Delta BFC)}$ ज्ञात करें।

उत्तर:- दिया हुआ है

$$\Delta ABC \text{ में } DE \parallel BC, \frac{BD}{DA} = \frac{5}{3}$$

$$\text{तो } \frac{\text{क्षेत्र}(\Delta DEF)}{\text{क्षेत्र}(\Delta BFC)} = ?$$

प्रमाण: ΔADE तथा ΔABC में

$$\angle AED = \angle ACB$$

$$\angle A = \angle A$$

$$\therefore \Delta ADE \sim \Delta ABC$$

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} \quad \text{समरूप त्रिभुजों की सांगत भुजाएँ समानुपाती होती हैं।}$$

ΔDEF तथा ΔBFC में

$$\angle FED = \angle FCB$$

$$\angle DFE = \angle BFC$$

$$\angle EDF = \angle BCF$$

$$\Delta DEF \sim \Delta BFC$$

$$\therefore \frac{\text{क्षेत्र}(\Delta DEF)}{\text{क्षेत्र}(\Delta BFC)} = \frac{DE^2}{BC^2} = \frac{AD^2}{AB^2}$$

$$\text{अब } \frac{BD}{DA} = \frac{5}{3}, \quad \frac{BD}{DA} + 1 = \frac{5}{3} + 1$$

$$\frac{BD+DA}{DA} = \frac{5+3}{3}$$

$$\frac{AB}{DA} = \frac{8}{3} \Rightarrow \frac{DA}{AB} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{\text{क्षेत्र} (\Delta DEF)}{\text{क्षेत्र} (\Delta BFC)} = \left(\frac{DA}{AB}\right)^2 = \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{9}{64}$$

6.6 पाईथोगोरस प्रमेय

लघु उत्तरीय प्रश्न

1. एक समद्विभाजित ΔABC में $\angle C = 90^\circ$ तो सिद्ध करें की $AB^2 = 2AC^2$

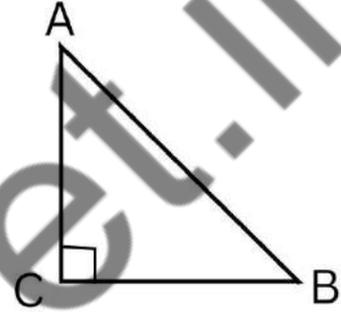
उत्तर:- $\therefore ABC$ एक त्रिभुज है।

जिसमें $AC = BC$

पाईथोगोरस प्रमेय से

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$= AC^2 + AC^2 = 2AC^2 \text{ साबित हुआ}$$



2. समबाहु ΔABC की प्रत्येक भुजा a इकाई है तो सिद्ध करें की त्रिभुज का शीर्षलम्ब $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ होगा।

उत्तर:- ABC एक समबाहु त्रिभुज है जिसकी प्रत्येक

भुजा की लम्बाई $= a$ इकाई A से $AD \perp BC$

पर खिंचा गया है

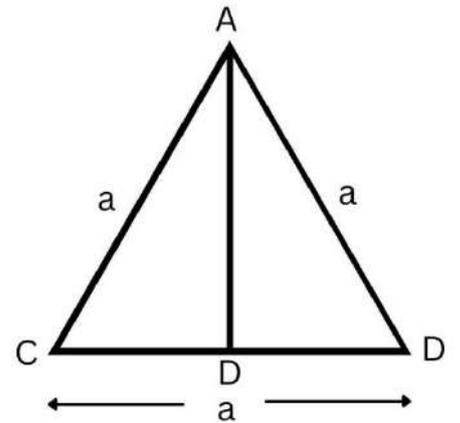
$$CD = BD = \frac{1}{2}$$

समकोण त्रिभुज ABC में

$$AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \sqrt{a^2 - (a/2)^2}$$

$$\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{4a^2 - a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$$

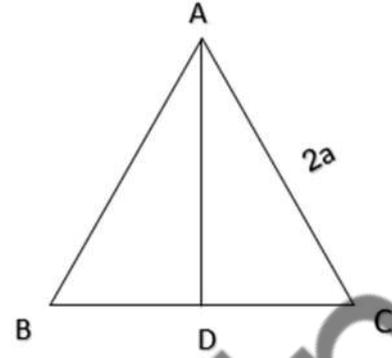
$$\text{शीर्ष लम्ब} = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$



3. एक समबाहु त्रिभुज ABC की भुजा $2a$ है उसके शीर्ष लम्ब ज्ञात करें।

उत्तर:- समबाहु त्रिभुज की प्रत्येक भुजा = $2a$ है।

$$\begin{aligned}\text{शीर्ष लम्ब } AD &= \sqrt{AD^2 - BD^2} \\ &= \sqrt{(2a)^2 - (a)^2} \\ &= \sqrt{4a^2 - a^2} \\ &= \sqrt{3a^2} \\ &= a\sqrt{3}\end{aligned}$$



4. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें $AC = BC$ है यदि $AB^2 = 2AC^2$ है तो सिद्ध कीजिए की ABC एक समकोण त्रिभुज है।

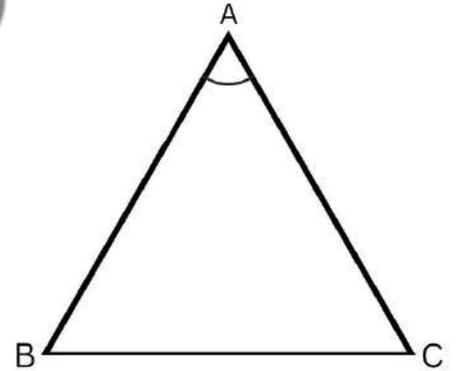
उत्तर:- $\triangle ABC$ में $AC = BC$ दिया है

साथ ही $AB^2 = 2AC^2$

$$AB^2 = AC^2 + AC^2 = BC^2 + AC^2$$

अतः $\angle C = 90^\circ$

$\therefore \triangle ABC$ समकोण त्रिभुज है।



5. यदि $\triangle ABC$ में $AD \perp BC$ है तो सिद्ध करें की $AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$.

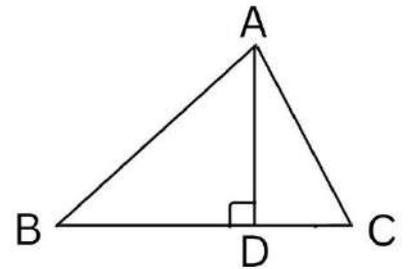
उत्तर:- ABC एक त्रिभुज है $AD \perp BC$ पर खिंचा गया है तो दिखाना है की

$$AB^2 = AD^2 + BD^2$$

$$AC^2 = AD^2 + CD^2$$

$$\therefore AB^2 - AC^2 = AD^2 + BD^2 - AD^2 - CD^2 = BD^2 - CD^2$$

$$\therefore AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$$



6. ABC एक त्रिभुज है जिसका कोण A समकोण है तथा $AC \perp BD$ है तो दर्शाए कि $AB^2 = 2AC^2$ है।

उत्तर:- $\therefore \Delta ABC$ का $\angle A$ समकोण है तथा $AC \perp BD$

ΔABD तथा ΔCBA में

$$\angle A = \angle ACB = 90^\circ$$

$$\angle B = \angle B \text{ (उभयनिष्ठ)}$$

$\Delta ABC \sim \Delta CBA$ (A - A समरूपता से)

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB} \quad \therefore AB^2 = BC \cdot BD \text{ साबित हुआ}$$

7. उस समबाहु त्रिभुज की ऊंचाई ज्ञात करे जिसकी भुजा $2a$ है।

उत्तर:- ABC एक समबाहु त्रिभुज है। जिसकी प्रत्येक भुजा की लम्बाई = $2a$

A से $AD \perp BC$ पर खिंचा गया है $BD = DC = a$

$$AB = AC = 2a$$

समकोण ΔABD में

$$AD^2 = AB^2 - BD^2$$

$$= 4a^2 - a^2 = 3a^2$$

$$\therefore AD = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$$

लम्ब की लम्बाई = $a\sqrt{3}$ इकाई

