8.3 कुछ विशिष्ठ कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात

लघु उत्तरीय प्रश्न

1. $\frac{5\cos^2 60^0+4\sec^2 30^0-\tan^2 45^0}{\sin^2 30°+\cos^2 30°}$ का मान ज्ञात करे।

उत्तर:- $$\frac{5\left(\frac{1}{2}\right)^2+4\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2-(1)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right)^2} = \frac{5\times\frac{1}{4}+\frac{4\times4}{3}-1}{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \frac{\frac{5}{4}+\frac{16}{3}-1}{1}$$

$$= \frac{15+64-12}{12} = \frac{67}{12}$$

2. यदि $\tan A = 1$ और $\sin B = \frac{1}{\sqrt{2}}$ तो $\cos(A+B)$ का मान ज्ञात करें जहाँ A और B न्युनकोण है

उत्तर:- $\boldsymbol{\tan A = 1\tan 45°}$

$\therefore \quad A = 45°$

फिर $\sin B = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin 45°$

$\therefore \quad B = 45°$

$\cos(A+B) = \cos(45° + 45°) = \cos 90° = 0$

3. $\sin 60^0 \cdot \cos 30^0 - \cos 60^0 . \sin 30°$ का मान निकालें।

उत्तर:- $\sin 60°.\cos 30° - \cos 60°.\sin 30°$

$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

4. यदि $\tan(A+B) = \sqrt{3}$ और $\tan(A-B) = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $0°\angle A+B \leq 90°$ और $A > B$ तो A और B का मान ज्ञात करें।

उत्तर:- $\tan(A+B) = \sqrt{3}$ और $\tan(A-B) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore \ \tan(A+B) = \tan 60°$ और $\tan(A-B) = 30°$

$\therefore \ A + B = 60°$

$A - B = 30°$

$2A = 90°$

$\therefore\ A = \frac{90°}{2} = 45°$

पुनः $A + B = 60°$

$45° + B = 60°$

$\therefore\ B = 60° - 45° = 15°$

$\therefore\ A = 45°$ और $B = 15°$

5. 60° के त्रिकोणमितिय अनुपात ज्ञात करें।

उत्तर:- माना की ABC एक समबाहु त्रिभुज है।

$\angle A = \angle B = \angle C = 60°$

$AD \perp BD$ पर डाला गया है।

$\angle BAD = 30°$ तथा $BD = DC$

$AB = BC = AC = x$ माना

$BD = CD = \frac{x}{2}$

ΔABD में $AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}}$

$= \sqrt{\frac{4x^2 - x^2}{4}} = \sqrt{\frac{3x^2}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2}}x$

$$sin60° = \frac{AD}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos60° = \frac{BD}{AB} = \frac{\frac{x}{2}}{x} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$tan60° = \frac{AD}{BD} = \frac{\sqrt{3}}{2}x \,/\, \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}x \times \frac{2}{x} = \sqrt{3}$$

इस प्रकार $cot60° = \frac{1}{\sqrt{3}}; cosec60° = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$sec60° = 2$

6. यदि $\theta = 30°$ तो सिध्द करें की $4\,cos^3\,\theta - 3\,cos\,\theta = 0$

उत्तर:- L.H.S. = $4\cos^3\theta - 3\cos\theta = 4\cos^3 30° - 3\cos 30°$

$$= 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4 \times \frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0$$ साबित हुआ।

7. यदि $\theta = 45^0$ तो $tan^2\,\theta + \frac{1}{sin^2\,\theta}$ का मान ज्ञात करें।

उत्तर:- $tan^2\,\theta + \frac{1}{sin^2\,\theta} = tan^2\,45° + \frac{1}{\sin^2 45°}$

$$(1)^2 + \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 + 2 = 3$$

8. $2\,tan^2\,45^0 + cos^2\,30^0 - sin^2\,60^0$ का मान ज्ञात करें।

उत्तर:- $2tan^2 45° + cos^2 60° + sin^2 60$

$$2(1)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 2 + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 2 + 0 = 2$$

9. $sin\,45^0\,cos\,45^0 - sin30°cos30°$ का मान ज्ञात करें।

उत्तर:- $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

8.4 पूरक कोणों के त्रिकोंमितीय अनुपात

लघु उत्तरीय प्रश्न

1. यदि $tan\,A = cot\,B$ तो सिध्द करें की $A + B = 90°$

उत्तर:- $tan\,A = cot\,B$

या, $cot90° - A = cotB$

$\therefore \quad 90° - A = B$

$\therefore \quad 90° = A + B$ सिध्द हुआ'

2. यदि $tan2A = cot(A - 18°)$ जहाँ 2A न्युनकोण है तो A का मान ज्ञात करें।

उत्तर:- $tan2A = cot(A - 18°)$

$cot(90° - 2A) = cot(A - 18°)$

$\therefore\ 90° - 2A = A - 18°$

$3A = 108°$

$\therefore\ A = \frac{108^\circ}{3} = 36^\circ$

3. यदि sin3A = cos(A–26°) जहाँ 3A न्युनकोण है तो A का मान ज्ञात करें।

उत्तर:- $sin3A = cos(A - 26°)$

या, $cos(90° - 3A) = cos(A - 26°)$

$\therefore\ 90° - 3A = A - 26°$

या, $-3A - A = -90° - 26°$

या, $-4A = -116°$

या, $A = \frac{-116}{-4} = 29°$

A का मान $= 29°$

4. सिध्द करें कि $sin48°.sin23°.sec42°.sec67° = 1$

उत्तर:- $sin48°.sin23°.sec42°.sec67°$

$= cot(90° - 42°).cot(90° - 67°).cot42°.cot67°$

$= tan48°.tan67°.cot42°.cot67°$

$= (tan42°.cot42°)(tan67°.cot67°) = 1 \times 1 = 1$

5. यदि $sec\ 4A = cosec(A - 20)$, जहाँ 4A न्युनकोण है तो A का मान ज्ञात करें।

उत्तर:- $sec\ 4A = cosec(A - 20)$

$\therefore\ cosec(90° - 4A = cosec(A - 20)$

$\therefore\ 90° - 4A = A - 20°$

या, $-4A - A = -20° - 90°$

या, $-5A = -110°$

$A = \frac{-110°}{-5} = -22°$

6. यदि A, B और C ΔABCके अन्तः कोण है तो दिखिए कि $tan\left(\frac{B+C}{2}\right) = cot\frac{A}{2}$

उत्तर:- $\therefore \quad A + B + C = 180°$

$$\therefore \quad \frac{B+C}{2} = \left(\frac{180°}{2} - \frac{A}{2}\right) = 90° - \frac{A}{2}$$

$$tan\left(\frac{B+C}{2}\right) = tan\left(90° - \frac{A}{2}\right) = \cot\frac{A}{2}$$ साबित हुआ।

7. यदि $\angle A, \angle B$ एवं $\angle C, \Delta ABC$ के अन्तः कोण हो तो सिध्द करें कि $cos\frac{A+B}{2} = sin\frac{C}{2}$

उत्तर:- $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

$$\frac{A+B}{2} = \frac{180°-C}{2} = \left(90° - \frac{C}{2}\right)$$

$$cos\left(\frac{A+B}{2}\right) = cos\left(90° - \frac{C}{2}\right) = sin\frac{C}{2}$$

8. सिध्द करें की $tan1°tan2°tan3°.........tan89°$

उत्तर:- $tan1° = tan(90° - 89°)$

$= cot89°$

$tan2° = tan(90° - 88°)$

$= cot88°$

$\therefore cot89°.cot88°.cot87.........tan87°\ tan88°\ tan89°$

$cot89°.tan89° = 1$

$cot88°.tan88° = 1$

$cot87°.tan87° = 1$

$\therefore tan1°.tan2°\ tan3°.......tan87°tan88°\ tan89°$

$= 1 = R.H.S$

8.5 त्रिकोंणमितीय सर्वसमिका

लघु उत्तरीय प्रश्न

1. $\sqrt{\frac{1-cos\,A}{1+cos}} = cosecA - cotA$ सिध्द करें।

उत्तर:- L.H.S. $= \sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos}}$ अंश और हर में $(1-\cos A)$ से गुणा करने पर

$$= \sqrt{\frac{(1+\cos A)(1-\cos\ \ )}{(1+\cos\ \ )(1-\cos\ \ )}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1-\cos A)^2}{1-\cos^2 A}} = \sqrt{\frac{(1-\cos\ \ )^2}{\sin^2 A}}$$

$$= \frac{1-\cos}{\sin A} = \frac{1}{\sin A} - \frac{\cos A}{\sin A}$$

$$= \operatorname{cosec} A - \cot A = R.H.S.$$

2. सिध्द करें कि $\frac{1-\sin}{1+\sin} = (\sec\theta - \tan\theta)^2$

उत्तर:- L.H.S $= \frac{1-\sin\theta}{1+\sin}$ ऊपर निचे $1-\sin\theta$ से गुणा करने पर

$$= \frac{(1-\sin\theta)(1-\sin\ \ )}{(1+\sin\ \ )(1-\sin\theta)}$$

$$= \frac{(1-\sin\ \ )^2}{1+\sin^2\theta} = \frac{(1-\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}$$

$$= \left(\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2$$

$$= (\sec\theta - \tan\theta)^2 \quad \text{R.H.S.}$$

3. सिध्द करें कि $\frac{\sec\theta+\tan\theta}{\sec\theta-\tan\theta} = \left(\frac{1+\sin}{\cos\theta}\right)^2$

उत्तर:- L.H.S. $\frac{\sec^{\theta}+\tan\theta}{\sec\theta-\tan\theta} = \frac{(\sec\theta+\tan\ \ )(\sec\theta+\tan\ \ )}{(\sec\theta-\tan\ \ )(\sec\theta+\tan\ \ )}$

$$= \frac{(\sec\theta+\tan\ \ )^2}{\sec^2\theta+\sin^2\theta} = \frac{\left(\frac{1}{\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2}{1}$$

$$= \left(\frac{1+\sin}{\cos\theta}\right)^2 = \text{R.H.S}$$

4. $\frac{cos}{1+sin\,A} + \frac{1+s}{cosA} = 2sec\ A$ सिध्द करें।

उत्तर:- L.H.S. $= \frac{cosA}{1+sinA} + \frac{1+sinA}{cosA} = \frac{cos^2A+(1+s\quad)^2}{cos\quad(1+sinA)}$

$$= \frac{cos^2A+1+2sinA+sin^2A}{cosA(1+sinA)} = \frac{1+1+2sinA}{cosA(1+sin\ )}$$

$$= \frac{2+2s}{cosA(1+s\quad)} = \frac{2(1+s\quad)}{cosA(1+sin\ )}$$

$$= \frac{2}{cosA} = 2secA = R.H.S$$

5. $(cosec\theta - cot\theta)^2 = \frac{1-co}{1+cos}$ सिध्द करे।

उत्तर:- $\boldsymbol{L.H.S.} \quad = (cosec\theta - cot\theta)^2$

$$= \left(\frac{1}{sin\theta} - \frac{cos\theta}{sin\theta}\right)^2 = \left(\frac{1-cos\theta}{sin\theta}\right)^2$$

$$= \frac{(1-cos\theta)^2}{sin^2\theta} = \frac{(1-cos\theta)(1-cos\theta)}{cos^2\theta}$$

$$= \frac{(1-cos\theta)(1-cos\theta)}{(1+cos\theta)(1-cos\theta)} = \frac{1-cos\theta}{1+cos\theta} \qquad \boldsymbol{R.H.S.}$$

6. सिध्द करे $\frac{sin}{1+co} + \frac{1+c}{sin\theta} = 2cosec\ \theta$

उत्तर:- $\boldsymbol{L.H.S.} = \frac{sin}{1+c} + \frac{1+c}{sin\theta} = \frac{\sin^2\theta+(1+co\quad)^2}{\sin\theta(1+\cos\theta)}$

$$= \frac{\sin^2\theta+1+\cos^2\theta+2\,co}{sin\theta(1+cos\quad)}$$

$$= \frac{2+2\,co}{\sin\theta(1+cos\quad)}$$

$$= \frac{2}{\sin\theta} = 2cosec\theta \qquad \boldsymbol{R.H.S}$$

7. सिध्द करे कि $\frac{sin\,\theta-2\,sin^3\,\theta}{2\,cos^3\,\theta-cos\,\theta} = tan\theta$

उत्तर:- $= \frac{sin^{\theta} - 2\, sin^3\theta}{2\, cos^3\theta - cos\,\theta} = \frac{\sin\theta(1-2\sin^2\theta)}{\cos\theta(2\cos^2\theta-1)}$

$$= \frac{\tan\theta\cdot[1-2(1-\cos^2\theta)]}{(2\,co\ ^2\theta-1)} = \frac{\tan\theta\,.\,(1-2+2\cos^2\theta)}{2\cos^2-1}$$

$$= \frac{\tan\cdot(1-1+2\cos^2\theta)}{2\cos^2\theta-1}$$

$$= \frac{\tan\cdot(2\cos^2\theta-1)}{(2\cos^2\theta-1)} = \tan\theta = \quad R.H.S$$

8. सिध्द करे कि $(cos\,\theta + sin\,\theta)^2 + (cos\,\theta - sin\,\theta)^2 = 2$

उत्तर:- **L.H.S.** $= (\cos\theta + \sin\theta)^2 + (cos\theta - sin\theta)^2$

$$= \boldsymbol{cos^2}\theta + \boldsymbol{sin^2}\theta + \boldsymbol{2sin\,.\,cos}\theta + cos^2\theta + sin^2\theta - 2sin\theta\,.\,cos\theta$$

$$= 1 + 1 = 2 = \quad R.H.S$$

9. सिध्द करे कि $\frac{sin^4\theta - cos^4\theta}{sin^2 - cos^2\theta} = 1$

उत्तर:- $\boldsymbol{L.H.S.} = \frac{sin^4\theta - cos^4\theta}{sin^2 - cos^2\theta} = \frac{(\sin^2\theta)^2 - (\cos^2\theta)^2}{\sin^2\theta - \cos^2\theta}$

$$= \frac{(\sin^2\theta + \cos^2\theta)(sin^2\theta - cos^2\theta)}{(\sin^2 - \cos^2\theta)}$$

$$= sin^2\theta + cos^2\theta = 1 \qquad R.H.S$$

10. सिध्द करे कि $\left(\frac{1-tan}{1-cot}\right)^2 = tan^2 A$

उत्तर:- $\boldsymbol{L.H.S.} = \left(\frac{1-\tan}{1+\cot A}\right)^2 = \left(\frac{1-\tan}{1-\frac{1}{\tan A}}\right)^2$

$$= \left(\frac{1-\tan}{\frac{tanA-1}{\tan A}}\right)^2 = \frac{(1-\tan A)^2}{(\tan A-1)^2} \times tan^2A$$

$$= tan^2A \quad R.H.S$$

11. $\frac{1+cot^2 A}{1+tan^2 A} = cot^2 A$ सिध्द करे।

उत्तर:- $\frac{1+cot^2 A}{1+tan^2 A} = \frac{cosec^2 A}{sec^2 A} = \frac{\cos^2 A}{si\ \ ^2 A} = cot^2 A \quad = \quad R.H.S$

12. सिध्द करे $tan^2 \phi + cot^2 \phi + 2 = \sec^2 \phi \cdot \text{cosec}^2 \phi$

उत्तर:- $\boldsymbol{L.H.S.} \quad = tan^2 \phi + cot^2 \phi + 2 = \tan^2 \phi + \frac{1}{\tan^2 \phi} + 2$

$$= \frac{\tan^2 \phi + 1 + 2\tan^2 \phi}{\tan^2 \phi} = \frac{(\tan^2 \phi + 1)^2}{\tan^2 \phi}$$

$$= \frac{(\sec^2 \phi)^2}{\tan^2 \phi} = \frac{\sec^4 \phi}{\tan^2 \phi} = \sec^2\phi \frac{\sec^2 \phi}{\tan^2 \phi}$$

$$= \sec^2 \phi \frac{\frac{1}{\cos^2 \phi}}{\frac{sin^2\phi}{\cos^2 \phi}} = \frac{1}{\cos^2 \phi} \times \frac{\cos^2 \phi}{\sin^2 \phi} .sec^2\phi$$

$$= \frac{1}{\sin^1 \phi} \cdot \sec^2 \phi = \text{cosec}^2 \phi \cdot \sec^2 \phi = R.H.S$$

13. $\frac{1+sin}{cos\,\theta} + \frac{cos\,\theta}{1+sin} = 2\,sec\,\theta$

उत्तर:- L.H.S. $= \frac{1+\sin}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{1+\sin} = \frac{(1+\sin\ \ )^2 + \cos^2\theta}{\cos(1+sin\ \ )}$

$$= \frac{1+sin^2\theta + 2sin\theta + cos^2\theta}{cos\theta(1+sin\ \ )} = \frac{1+1+2sin\theta}{cos\theta\ .\ (1+sin\ \ )}$$

$$= \frac{2+2si}{cos\theta(1+sin\ \ )} = \frac{2(1+sin\theta)}{cos\theta.(1+sin\theta)}$$

$$= \frac{2}{cos\theta} = 2sec\theta = \quad R.H.S$$

14. सिध्द करे कि $(sec^4\,\theta - sec^2\,\theta) = cot^2\,\theta$

उत्तर:- $\boldsymbol{L.H.S.} \ = (sec^4\,\theta - sec^2\,\theta)$

$$= (1 + tan^2\theta)^2 - 91 + tan^2\theta)$$

$$= \mathbf{1} + \boldsymbol{tan^4}\theta + 2tan^2\theta - 1 - tan^2\theta$$

$$= \boldsymbol{tan^4}\theta + \boldsymbol{tan^2}\theta = \quad R.H.S$$

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

1. सिध्द करे कि $\frac{\sin\theta}{1-cos} + \frac{\tan\theta}{1+cos} = cosec\theta sec\theta + cot\theta$

उत्तर:- $L.H.S. = \frac{\sin\theta}{1-cos} + \frac{\tan\theta}{1+\cos\theta}$

$$= \frac{sin\theta}{1-cos\theta} + \frac{sin\theta}{(1+cos\ \ )cos\theta}$$

$$= \frac{sin\theta(1+cos\ \ )cos\theta + sin\ \ (1-cos\theta)}{(1-cos\theta)(1+cos\ \ )cos\theta}$$

$$= \frac{(sin\theta + sin\ \ .\ cos\theta)cos\theta + sin\theta - si\ \ \ .\ cos\theta}{(1-cos^2\theta)cos\theta}$$

$$= \frac{sin\theta\ .\ cos\theta + sin\ \ .\ cos^2\theta + sin\theta - sin\theta\ .\ cos\theta}{sin^2\theta\ .\ cos\theta}$$

$$= \frac{sin\theta cos^2\theta + sin\theta}{sin^2\theta\ .\ cos\theta} = \frac{sin\theta\ .\ cos^2\theta}{sin^2\theta\ .\ cos\theta} = \frac{sin\theta}{sin^2\theta\ .\ cos\theta}$$

$$= \frac{cos\theta}{sin\theta} + \frac{1}{sin\theta\ .\ cos\theta} = cot\theta + cosec\theta\ .sec\theta$$

$$= cosec\theta\ .sec\theta + cot\theta = \quad R.H.S.$$