

पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन  
( Surface Areas and Volumes )

13.2 ठोसों के संयोजन का  
पृष्ठीय क्षेत्रफल

लघु उत्तरीय प्रश्न

1. उस अर्द्धगोले का वक्र पृष्ठ ज्ञात करें जिसका व्यास 14 सेमी. है।

उत्तर : – अर्द्धगोले की त्रिज्या =  $\frac{14}{2} = 7$  सेमी<sup>०</sup>

$$\text{अर्द्धगोले के वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल} = 2\pi r^2$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \text{ cm}^2 = 44 \times 7 = 308 \text{ सेमी}^2$$

2. एक शंकु के आधार की त्रिज्या 5 सेमी<sup>०</sup> तथा ऊँचाई 12 सेमी<sup>०</sup> है, तो इसका वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करें।

उत्तर : – शंकु की त्रिज्या =  $r = 5$  सेमी<sup>०</sup>

$$\text{ऊँचाई} = h = 12 \text{ सेमी}^{\circ}$$

$$\therefore l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{(12)^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13 \text{ सेमी}^{\circ}$$

$$\begin{aligned} \text{वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल} &= \pi r l = \frac{22}{7} \times 5 \times 13 = \frac{100 \times 13}{7} = \frac{1430}{7} \\ &= 204.3 \text{ सेमी}^2 \text{ लगभग} \end{aligned}$$

3. उस गोले का वक्र पृष्ठ निकालें जिसका व्यास 14 सेमी. है।

उत्तर : – गोले की त्रिज्या =  $\frac{14}{2} = 7$  सेमी<sup>०</sup>

$$\text{गोले के वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल} = 4\pi r^2$$

$$= 4 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7$$

$$= 88 \times 7 = 616 \text{ वर्ग सेमी}^{\circ}$$

4. उस गोले का पृष्ठ क्षेत्रफल निकालें जिसका व्यास 14 सेमी है।

**उत्तर :** - गोले की त्रिज्या =  $\frac{14}{2} = 7$  सेमी<sup>०</sup>

$$\text{गोले का पृष्ठ क्षेत्रफल} = 4\pi r^2$$

$$= 4 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 = 4 \times 154 = 616 \text{ सेमी}^{\circ}$$

5. एक लम्बवृत्तीय शंकु का आयतन  $100\pi$  सेमी<sup>० 3</sup> है और ऊँचाई 12 सेमी<sup>०</sup> है तो तिर्यक ऊँचाई निकालें।

**उत्तर :-** शंकु का आयतन =  $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \times 12 = 100 \pi$  सेमी<sup>० 3</sup>

$$\frac{1}{3}r^2 \times 12 = 100$$

$$4r^2 = 100$$

$$\therefore r^2 = \frac{100}{4} = 25$$

$$\begin{aligned}\therefore \text{तिर्यक ऊँचाई} &= l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{(12)^2 + (5)^2} \\ &= \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13 \text{ सेमी}\end{aligned}$$

6. एक खिलौना त्रिज्या 7 सेमी वाले एक शंकु के आकार का है, जो कि उसी त्रिज्या वाले एक अर्द्धगोले पर अध्यारोपित है। इस खिलौने का संपूर्ण ऊँचाई 16 सेमी है। इस खिलौने का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

**उत्तर :-** खिलौना का संपूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल = अर्द्धगोले का संपूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल + शंकु का संपूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल

$$= 2\pi r^2 + \pi r l = \pi r(2r + l)$$

$$\text{माना कि शंकु की ऊँचाई (h) = } 16 - 7 = 9 \text{ सेमी}^{\circ}$$

$$l^2 = h^2 + r^2 = (9)^2 + (7)^2 = 130 \text{ सेमी}$$

$$l = \sqrt{130} \text{ cm} = 11.4 \text{ cm (लगभग)}$$

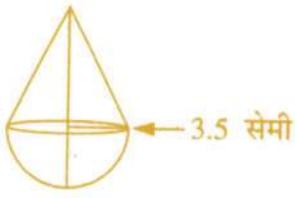
अतः (i) से खिलौने का संपूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल

$$= \pi r(2r + l) = \frac{22}{7} \times 7(14 + 11.4) \text{ सेमी}^2$$

$$= 22 \times 25.4 \text{ cm}^2 = 558.8 \text{ सेमी}^{\circ 2}$$

7. एक खिलौना 3.5 सेमी० त्रिज्या वाले एक शंकु के आकार का है, जो उसी त्रिज्या वाले अर्द्धगोले पर अधारोपित है। इस खिलौने की संपूर्ण ऊँचाई 15 सेमी० है, तो संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करें।

उत्तर :-



$$\text{अर्द्धगोले का पृष्ठ क्षेत्रफल} = 2\pi r^2 = 2 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5$$

$$= 44 \times 0.5 \times 3.5 \text{ सेमी}^2 = 77 \text{ सेमी}^2$$

$$\text{शंकाकार भाग की ऊँचाई} = (15 - 3.5) = 11.5 \text{ सेमी}^0$$

$$\text{शंकु की तिर्यक ऊँचाई (l)} = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{(11.5)^2 + (3.5)^2}$$

$$= \sqrt{144.50} = 12.02 \text{ सेमी}$$

$$\text{शंकाकार भाग का क्षेत्रफल} = \pi r l = \frac{22}{7} \times 3.5 \times 12.02$$

$$= 132.22 \text{ सेमी}^2$$

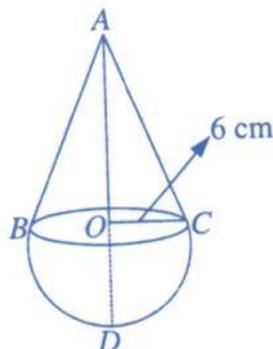
$$\text{खिलौने का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल} = (77 + 132.22) \text{सेमी}^2$$

$$= 209.22 \text{ सेमी}^2$$

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

1. एक खिलौने की त्रिज्या 6cm वाले एक शंकु के आकार का है, जो उसी त्रिज्या वाले अर्द्धगोले पर अधारोपित है। इस खिलौने की संपूर्ण ऊँचाई 11 cm है। इस खिलौने का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर :-



$$r = 6 \text{ सेमी}^\circ$$

$$AD = 11 \text{ सेमी}^\circ$$

$$AO = 11 - 6 = 5 \text{ सेमी}^\circ$$

शंकाकार भाग का पृष्ठीय क्षेत्रफल + अर्धगोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल = खिलौने का पृष्ठीय क्षेत्रफल =  $AC = \sqrt{5^2 + 6^2} = \sqrt{25 + 36} = \sqrt{61}$  सेमी $^\circ$

$$\text{शंकाकार भाग का पृष्ठीय क्षेत्रफल} = \pi r l = \pi \times 6 \times \sqrt{61} \text{ सेमी}^\circ^2$$

$$\text{अर्धगोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल} = 2\pi r^2 = 2\pi(6)^2 = 72\pi \text{ सेमी}^\circ$$

$\therefore$  खिलौने का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= \pi \times 6 \times \sqrt{61} + 72\pi$$

$$= 6\pi(\sqrt{61} + 12) \text{ सेमी}^\circ^2$$

$$= 6\pi(7.81 + 12) \text{ सेमी}^\circ^2$$

$$= 6 \times \frac{22}{7} \times 19.81 \text{ सेमी}^\circ^2$$

$$= 6 \times 22 \times 2.83 \text{ सेमी}^\circ^2$$

$$= 132 \times 2.83 \text{ सेमी}^\circ^2$$

$$= 373.56 \text{ सेमी}^\circ^2$$

2. एक शंकाकार लट्टू के ऊपर एक अर्धगोला अधारोपित है। लट्टू की पूरी ऊँचाई 5 सेमी $^\circ$  और इसका व्यास 3.5 सेमी $^\circ$  है तो लट्टू का पृष्ठ क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

**उत्तर :** - शंकु का व्यास = अर्ध गोला का व्यास

$$\text{शंकु की ऊँचाई} = \text{लट्टू की पूरी ऊँचाई} - \text{अर्ध गोला का ऊँचाई}$$

$$= 5 - \frac{7}{4} = \frac{20-7}{4} = \frac{13}{4} \text{ cm}$$

$$\text{शंकु की तिरछी ऊँचाई (l)} = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{\left(\frac{13}{4}\right)^2 + \left(\frac{7}{4}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{169}{16} + \frac{49}{16}} = \sqrt{\frac{218}{16}} = \frac{\sqrt{218}}{4} = \frac{14.4}{4} = 3.6 \text{ सेमी}^\circ$$

लट्टू का पृष्ठ क्षेत्रफल = अर्धगोले का पृष्ठ क्षेत्रफल + शंकु का पृष्ठ क्षेत्रफल

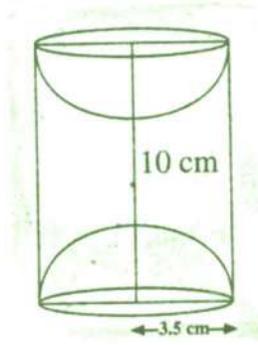
$$= 2\pi r^2 + \pi r l = \pi r(2r + l)$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{7}{4} \left( 2 \times \frac{7}{4} + \frac{36}{10} \right) = \frac{11}{2} \left( \frac{7}{2} + \frac{18}{5} \right)$$

$$= \frac{11}{2} \left( \frac{35+36}{10} \right) = \frac{11}{2} \times \frac{71}{10} = \frac{781}{20} = 39.05 \text{ सेमी}^2$$

3. लकड़ी के एक ठोस बेलन के प्रत्येक सिरे पर एक अर्द्धगोला खोदकर एक वस्तु बनाया जाता है। यदि बेलन की ऊँचाई 10 सेमी और बेलन के आधार की त्रिज्या 3.5 सेमी हो तो बचे हुए ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन ज्ञात करें।

उत्तर :-



तैयार होने पर वस्तु का पृष्ठ क्षेत्रफल = बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + 2 × अर्धगोले का पृष्ठ क्षेत्रफल

$$= 2\pi r h + 2 \times 2\pi r^2$$

$$= 2\pi r(h + 2r)$$

जहाँ  $r = 3.5 \text{ cm}$  और  $h = 10 \text{ cm}$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 3.5(10 + 2 \times 3.5) \text{ cm}^2$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} (10 + 7) \text{ cm}^2$$

$$= 22 \times 17 = 374 \text{ cm}^2$$

शेष बचे ठोस का आयतन = बेलन का आयतन - 2 × अर्धगोले का आयतन

$$\begin{aligned}
&= \pi r^2 h - 2 \times \frac{2}{3} \pi r^3 \\
&= \pi r^2 \left( h - \frac{4}{3} r \right) \\
&= \frac{22}{7} \times \frac{35}{10} \times \frac{35}{10} \left( 10 - \frac{4}{3} \times \frac{35}{10} \right) \\
&= 22 \times \frac{5}{10} \times \frac{35}{10} \left( 10 - \frac{14}{3} \right) \\
&= 11 \times \frac{7}{2} \left( \frac{30-14}{3} \right) \\
&= \frac{77}{2} \times \frac{16}{3} = \frac{616}{3} \text{ cm}^3
\end{aligned}$$

### 13.3 ठोसों के संयोजन का आयतन

#### लघु उत्तरीय प्रश्न

1. एक लंबवृत्तीय शंकु की ऊँचाई 24 सेमी<sup>०</sup> और आधार की त्रिज्या 7 सेमी<sup>०</sup> है, तो उसके आयतन की गणना करें।

**उत्तर :** - शंकु की ऊँचाई  $h = 24$  सेमी<sup>०</sup>

शंकु की त्रिज्या  $r = 7$  सेमी<sup>०</sup>

$$\text{आयतन} = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 24 \text{ सेमी}^3$$

$$22 \times 7 \times 8 \text{ सेमी}^3 = 1232 \text{ सेमी}^3$$

2. एक लम्बवृत्तीय शंकु की ऊँचाई 28 सेमी<sup>०</sup> और आधार की त्रिज्या 21 सेमी<sup>०</sup> है, तो उसके आयतन की गणना करें।

**उत्तर :** - शंकु का आयतन  $= \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \times 28$

$$= \frac{88 \times 441}{3} = 88 \times 147 = 12936 \text{ सेमी}^3$$

3. एक लम्बवृत्तीय शंकु की ऊँचाई 28 सेमी० और आधार की त्रिज्या 21 सेमी० है, तो उसके आयतन की गणना करें।

**उत्तर :** - लम्ब वृत्तीय शंकु की त्रिज्या =  $r$  हो और ऊँचाई =  $h$  हो तो आयतन =  $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$h = 28 \text{ सेमी}^\circ$$

$$r = 21 \text{ सेमी}^\circ$$

$$\begin{aligned}\therefore \text{आयतन} &= \frac{1}{3}\pi \times (21)^2 \times 28 = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 441 \times 28 \\ &= \frac{88 \times 441}{3} = 88 \times 147 = 12936 \text{ सेमी}^\circ{}^3\end{aligned}$$

### 13.4 एक ठोस का एक आकार से दूसरे आकार में रूपांतरण

**लघु उत्तरीय प्रश्न**

1. किसी ठोस घनाभ जिसकी विमाएँ 9 सेमी  $\times$  11 सेमी  $\times$  12 सेमी हैं, को पिघलाकर 3 सेमी व्यास वाले कितने गोले बनाए जा सकते हैं?

**उत्तर :** - ठोस घनाभ का आयतन  $9 \times 11 \times 12$  सेमी<sup>3</sup>

$$\text{गोले का व्यास} = 3 \text{ सेमी}$$

$$\text{अतः त्रिज्या} = \frac{3}{2} \text{ सेमी}$$

$$\text{गोले का आयतन} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{3}{2}\right)^3 \text{ सेमी}^3 = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{27}{8} \text{ सेमी}^3$$

$$\text{गोले की संख्या} = \frac{9 \times 11 \times 12 \times 3 \times 7 \times 8}{4 \times 22 \times 27} = 84$$

2. एक गोले का व्यास 6 सेमी० है। इसे पिघलाकर 0.2 सेमी० व्यास वाला एक तार बनाया गया है। तार की लम्बाई ज्ञात करें।

**उत्तर :** - गोले का व्यास = 6 सेमी°

$$\therefore \text{त्रिज्या} = 3 \text{ सेमी}^\circ$$

$$\text{तार की त्रिज्या} = \frac{0.2}{2} = 0.1 \text{ सेमी}^\circ$$

बनाये गए तार की लम्बाई =  $l$

$$\text{तार का आयतन} = \pi r^2 l = \pi (0.1)^2 l \text{ सेमी}^\circ{}^3$$

$$\text{गोले का आयतन} = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi \times 27 = 36\pi$$

$$\therefore \pi \times 0.1 \times 0.1 \times l = \frac{4}{3} \pi \times 27 = 36\pi$$

$$l = \frac{36}{0.01} = 3600 \text{ cm} = 36 \text{ cm}$$

3. त्रिज्या 4.2 सेमी° वाले धातु के एक गोले को पिघला कर त्रिज्या 6 सेमी° वाले एक बेलन के रूप में ढाला जाता है। बेलन की ऊँचाई ज्ञात करें।

**उत्तर :** - गोले की त्रिज्या =  $r_1 = 4.2$  सेमी°

$$\text{गोले का आयतन} = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi (4.2)^3 \text{ सेमी}^\circ{}^3$$

मान लिया की बेलन की ऊँचाई =  $h$

$$\text{बेलन का आयतन} = \pi r_2^2 h = \pi (6)^2 \times h \text{ सेमी}^\circ{}^3$$

गोले का आयतन = बेलन का आयतन

$$\pi (6)^2 h = \frac{4}{3} \pi (4.2)^3$$

$$36h = \frac{4}{3} \times \frac{42}{10} \times \frac{42}{10} \times \frac{42}{10}$$

$$\therefore h = \frac{42 \times 42 \times 42}{10 \times 36 \times 10 \times 10} \times \frac{4}{3} = \frac{74088}{27 \times 1000}$$

$$= \frac{74.088}{27} = 2.744 \text{ सेमी}^\circ{}^3$$

**दीर्घ उत्तरीय प्रश्न**

1. 3 मीटर व्यास का एक कुआँ 14 मीटर की गहराई तक खोदा जाता है। इससे निकली हुई मिट्टी को कुएँ के चारों ओर 4 मीटर चौड़ी एक वृत्ताकार वलय बनाते हुए समान रूप से फैलाकर एक प्रकार का बाँध बनाया जाता है। इस बाँध की ऊँचाई ज्ञात करें।

**उत्तर :-** कुआँ लम्ब वृतीय बेलन के आकार का है।

$$r = \frac{3}{2}, h = 14 \text{ m}$$

$$\text{निकली मिट्टी का आयतन} = \pi \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times 14 \text{ m}^3 = \pi \frac{9}{4} \times 14 \text{ m}^3 = \frac{63\pi}{2} \text{ m}^3$$

∴ निकली मिट्टी को कुएँ के चारों तरफ वलय के रूप में रखा गया है।

$$\text{चबूतरा समेत कुएँ की त्रिज्या} = \left(\frac{3}{2} + 4\right) = \frac{11}{2} \text{ m}$$

$$\begin{aligned} \text{चबूतरे का क्षेत्रफल} &= \pi(R^2 - r^2) = \pi \left\{ \left(\frac{11}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \right\} \text{ m}^2 \\ &= \pi \left\{ \frac{121}{4} - \frac{9}{4} \right\} \text{ m}^2 = \pi \times \frac{112}{4} = 28\pi \text{ m}^2 \end{aligned}$$

मान लिया की चबूतरे की ऊँचाई ( या बाँध की ऊँचाई )  $h$  है तो मिट्टी का आयतन  $= 28\pi \times h \text{ m}^3$

$$\text{प्रश्नानुसार, } 28\pi \times h = \frac{63\pi}{2}$$

$$\text{या, } 28h = \frac{63}{2}$$

$$\therefore h = \frac{63}{2 \times 28} = \frac{9}{8} = 1.125 \text{ m}$$

$$\text{अतः बाँध की ऊँचाई} = 1.125 \text{ m}$$

2. 22 सेमी किनारे वाले एक ठोस घन को पिघलाकर एक 7 सेमी लम्बा वृत्ताकार बेलन बनाया जाता है। बेलन की त्रिज्या ज्ञात करें।

**उत्तर :-** घन की एक भुजा = 22 सेमी ◦

$$\text{आयतन} = (22)^3 \text{ घन सेमी}$$

$$\text{बेलन की त्रिज्या} = r$$

$$\text{बेलन का आयतन} = \pi r^2 \times h$$

$$= \pi r^2 \times 7 = \frac{22}{7} r^2 \times 7$$

$$= 22r^2$$

प्रश्नानुसार,

$$22r^2 = (22)^3 = 22 \times 22 \times 22$$

$$\therefore r^2 = \frac{22 \times 22 \times 22}{22} = 22 \times 22$$

$$\therefore r = \sqrt{22 \times 22} = 22 \text{ सेमी}$$

बेलन की त्रिज्या = 22 सेमी

### 13.5 शंकु का छिन्नक

#### दीर्घ उत्तरीय

1. एक शंकु के छिन्नक की तिर्यक ऊँचाई 4 सेमी<sup>०</sup> है तथा उसके वृत्तीय सिरों का परिमाण 18 सेमी<sup>०</sup> और 6 सेमी<sup>०</sup> है। इस छिन्नक का वक्र पृष्ठ क्षेत्रफल ज्ञात करें।

**उत्तर :-** परिधि = 18 सेमी<sup>०</sup>  $\therefore 2\pi r_1 = 18$ ;  $\therefore r_1 = \frac{18}{2\pi} = \frac{9}{\pi}$  सेमी

फिर  $2\pi r_2 = 6$ ;  $\therefore r_2 = \frac{6}{2\pi} = \frac{3}{\pi}$  सेमी

वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल =  $\pi l(r_1 + r_2)$

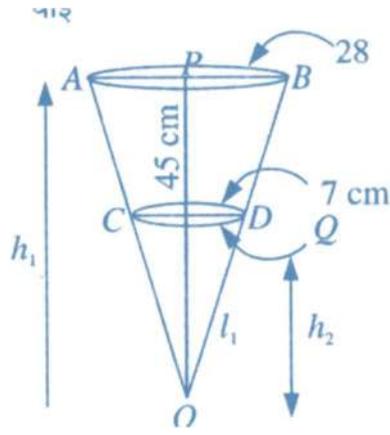
$$= \frac{22}{7} \times 4 \left( \frac{9}{\pi} + \frac{3}{\pi} \right) = \frac{\pi \times 4}{\pi} (9 + 3) \text{सेमी}^2$$

$$= 4 \times 12 = 48 \text{ सेमी}^2$$

2. पानी पीने वाले ग्लास 45 सेमी<sup>०</sup> ऊँचाई वाले एक शंकु के एक छिन्नक के आकार का है। यदि दोनों वृत्ताकार सिरों की त्रिज्या 28 सेमी और 7 सेमी<sup>०</sup> हैं, तो ग्लास की धारिता निकालें। ( $\pi = \frac{22}{7}$  का उपयोग करें)

**उत्तर :-** इस छिन्नक को दो लम्ब वृत्तीय शंकुओं  $OAB$  और  $OCD$  के अंतर के रूप में देखा जा सकता है।

मान लिया कि सेंटीमीटर में शंकु  $OAB$  की ऊँचाई =  $h_1$  और तिर्यक ऊँचाई =  $l_1$  है।



फिर मान लिया की शंकु  $OCD$  की और तिर्यक ऊँचाई  $h_2$  है।

$r_1 = 28 \text{ cm}$ ,  $r_2 = 7 \text{ cm}$  और छिन्नक की ऊँचाई  $h = 45 \text{ cm}$  है।

$$h_1 = 45 + h_2$$

$\triangle OPB$  और  $\triangle OQD$  समरूप है।

$$\text{अतः } \frac{h_1}{h_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{28}{7} = \frac{4}{1}$$

$$\therefore h_1 = 4h_2 \quad \therefore 4h_2 = 45 + h_2$$

$$\text{या, } 3h_2 = 45$$

$$\therefore h_2 = \frac{45}{3} = 15 \text{ cm} \quad \therefore h_1 = 4 \times 15 = 60 \text{ cm}$$

छिन्नक का आयतन = शंकु  $OAB$  का आयतन - शंकु  $OCD$  का आयतन

$$= \left( \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} (28)^2 \times 60 - \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} (7)^2 \times 15 \right) \text{ cm}^3$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} [(28)^2 \times 60 - (7)^2 \times 15] \text{ cm}^3$$

$$= \frac{22}{21} \times [28 \times 28 \times 15 \times 4 - 7 \times 7 \times 1] \text{ cm}^3$$

$$= \frac{22}{21} \times 15 \times 7 \times 7 (4 \times 4 \times 4 - 1) \text{ cm}^3$$

$$= \frac{22}{21} \times 49 \times 15 (64 - 1) \text{ cm}^3$$

$$= \frac{15 \times 154}{3} \times 63 \text{ cm}^3 = 154 \times 21 \times 15$$

$$= 3234 \times 15 \text{ cm}^3 = 48510 \text{ cm}^3$$

notesstreet.in